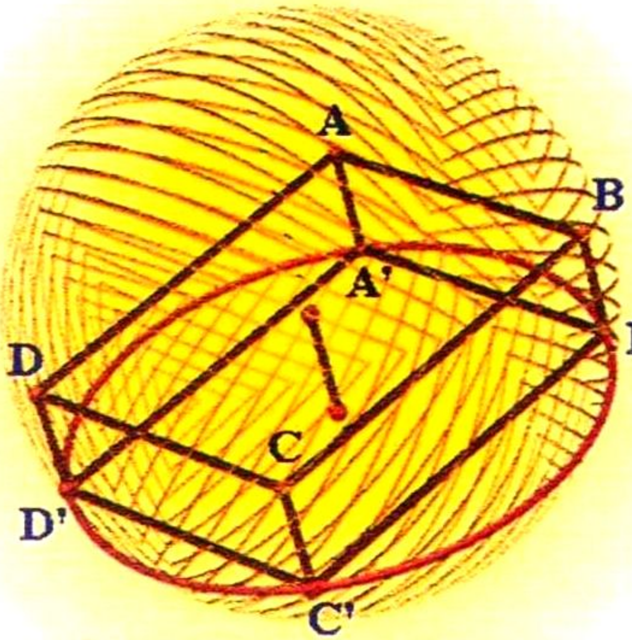
NGƯT. PHẠM QUỐC PHONG



MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGƯT. PHẠM QUỐC PHONG

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC

TOÁN

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI TÁC GIẢ

Có thể bạn đã đọc nhiều, rất nhiều trang tài liệu về Toán học Phổ thông, bởi sự ham hiểu biết đã và đang đốt cháy ngọn lửa nhiệt tình về lòng say mê Toán học trong trái tim bạn. Như trẻ nhỏ ngắm các vì sao lung linh trong bầu trời đêm, tôi hiểu rằng đã không biết bao nhiêu lần bạn luôn tự vấn mình : Người ta *đã nghĩ ra* các lời giải thông minh của các bài toán đó như thế nào?

Toán Sơ cấp thật đa dạng, đầy tràn hấp dẫn và chắc chắn có không ít *bài toán lạ* đã làm bạn nhiều đêm thao thức. Như những ngọn sóng xô bờ đại dương, sự muốn chiếm lĩnh tri thức đã trỗi dậy trong bạn ao ước tìm ra: *Thuật toán* giải cho các dạng toán đó.

Có thể bạn đã giải rất nhiều bài toán Sơ cấp. Dù ở đâu, rồi thì nước cũng theo các dòng sông đổ về biển cả. Biết bao nhiêu lần trí tò mò của bạn lại đánh thức : *Kết nối xâu chuỗi* các bài toán đó là gì ?

Cuốn sách các bạn đang cầm trong tay muốn chia sẻ với các bạn những *trở trăn* như thế. "MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG", gồm 16 chuyên đề độc lập. Đó là những bài báo khoa học về phương pháp giải toán đăng tải trên các Tạp chí TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ, Tạp chí DẠY VÀ HỌC NGÀY NAY, Thông báo KHOA HỌC ĐẠI HỌC VINH. Phần lớn các chuyên đề trong cuốn tài liệu này là các đề tài khoa học được xếp loại xuất sắc tuyển đăng Thông tin KHOA HỌC ngành GD&ĐT Hà Tĩnh. Từng phần nội dung các chuyên đề đã được chắt lọc biên soạn vào một số đầu sách chuyên khảo Toán Phổ thông cùng chung tác giả với cuốn tài liệu này.

Mỗi chuyên đề là một nội dung mới trình bày những *thuật toán mới*, đem đến cho người đọc những lời giải thật chi tiết mà lại *thật đơn giản*. Cuốn sách chứa đựng những *lời bình* làm nổi rõ bản chất bài toán, bản chất lời giải, liên kết – xâu chuỗi các bài toán. *Lời bình* – nơi sự hiểu biết của bạn sẽ được *thăng hoa*.

Tác giả chỉ dám nghĩ cuốn sách như là món quà nhỏ, góp phần làm sáng rõ hơn về phương pháp luận tư duy khoa học, mang đến *chút ít* kiến thức mới mẻ, bổ ích cho các Thầy cô giáo, cho các em học sinh thân yêu đang say mê giảng dạy và học tập Toán học Phổ thông.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng cuốn sách vẫn có thể không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được đón nhận sự đóng góp ý kiến của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả theo địa chỉ sau đây :

Bà Hoàng Thị Tế

Số nhà 239, đường Nguyễn Ái Quốc, thị xã Hồng Lĩnh, tỉnh Hà Tĩnh

Điện thoại : 039.6260713.

Cuối cùng xin trân trọng biết ơn GS Viện sĩ Nguyễn Cảnh Toàn, PGS.TS Phan Huy Khải (Viện Toán học Việt Nam), TS Nguyễn Việt Hải (Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ) đã động viên khích lệ cho sự ra đời của cuốn sách này.

Tác giả

PHẠM QUỐC PHONG

LỜI GIỚI THIỆU

Học sinh, sinh viên ta thường bị chê là thiếu năng động, sáng tạo. Nhưng lỗi trước hết không phải ở họ. Ngành giáo dục có chủ trương rèn óc thông minh sáng tạo cho người học nhưng chỉ mới dừng lại ở mức chung chung. Kiến thức thì đã có sách giáo khoa chỉ cho rõ ràng; còn tư duy thì ẩn sau kiến thức, mỗi giáo viên chỉ còn biết dựa vào kinh nghiệm của bản thân, thường là rời rạc, *còn xa* mới trở thành lí luận chỉ đường chắc chắn. Lỗi cũng không phải ở các thầy vì nhà trường sư phạm cũng còn thiếu khoa học về sự sáng tạo. Thật ra thì nhân loại cũng gần đây mới xây dựng được một khoa học mới gọi là sáng tạo học (Creatology) mà năm khai sinh là 1990. Như vậy, khoa học này còn trẻ lắm và chưa đủ sức tràn vào các trường học ngay ở các nước phát triển chứ đừng nói nước ta. Nhưng như thế lại hay. Đây là thời cơ để chúng ta "đón tắt, đi đầu". Quả vậy, ta có những thuận lợi sau đây để thực hiện chiến lược đó :

– Thanh, thiếu niên ta thông minh không kém thanh thiếu niên các nước phát triển (điều đó biểu hiện rõ qua các kì thi quốc tế).

– Khoa học này không đòi hỏi trang thiết bị gì nên nước nghèo cũng có thể chạy đua với nước giàu.

– Khoa học này còn mới, người ta chưa đi xa lắm, dễ đuổi kịp.

– Cơ sở triết học của nó là triết học duy học biện chứng, triết học của chế độ ta.

• Về điểm thứ tư này, xin lấy ngay trang đầu của quyển sách – mà tôi sắp giới thiệu với bạn đọc – ta gặp ngay ở đây phương pháp luận sau: một nội dung (*ở đây là* $\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$) có thể chứa trong nhiều hình thức (*còn có hình thức* $\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}$) và hình thức tác động trở lại nội dung". (*Hình thức sau cho phép khử hệ số bất định*).

Cũng tư duy triết học đó có thể xuất hiện ngay ở lớp 1. Ví dụ học sinh lớp 1 phải làm phép toán cộng 7 + 9 thì thường dùng que tính để làm. Em nào thông minh thì sẽ biết thay 9 bằng 10 – 1 (*tức là dùng một hình thức khác để biểu thị nội dung "chín"*) và biến phép cộng với 9 (khó vì 7 và 9 là những số lớn đối với học sinh lớp 1) thành hai phép dễ là cộng với 10 và trừ đi 1, không phải dùng que. Rõ ràng ta gặp lại tư duy triết học nói trên. Một đặc điểm của "*sáng tạo*" là ta có thể gặp nó ở một thang rất dài (học sinh lớp 1, thầy giáo, nhà bác học), ở một phạm vi nội dung rất rộng (toán học, giáo dục, ...). Thật là một sai lầm khi hạn chế việc sáng tạo lại ở những người có học vấn cao.

Thầy giáo là người có trách nhiệm rèn luyện tư duy sáng tạo cho học trò. Cách bắt đầu là không bằng lòng chỉ với kiến thức và luôn tự đòi hỏi phải đi sâu vào tư duy ẩn náu sau kiến thức (tự học hay dạy cho học trò). Đối với học trò, bao giờ cũng đặt câu hỏi : "Em hãy nói rõ em đã nghĩ như thế nào mà làm theo thế này mà không làm theo thế kia". Cứ thế sẽ sâu dần từ tư duy đến quan điểm, tư tưởng, nhân sinh quan, thế giới quan, phương pháp luận. Dĩ nhiên là phải đọc thêm sách viết về "sáng tạo" nhưng *phải có trải nghiệm thực tế* thì đọc mới thấy hết cái hay.

*

* *

Tôi xin giới thiệu quyển sách " MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG" của nhà giáo Phạm Quốc Phong. Theo tôi đó là một *tấm gương* phấn đấu để trở nên sáng tạo của một giáo viên toán phổ thông, làm nổi rõ mối quan hệ giữa khoa học bộ môn (toán học) và khoa học sư phạm.

Hy vọng người Việt Nam không chỉ đi học "sáng tạo" của thế giới mà còn góp phần xứng đáng của mình vào khoa học mới mẻ này.

Giáo sư viện sĩ NGUYỄN CẢNH TOÀN

Lời tựa

Là một người say mê toán sơ cấp, một người đã, đang và sẽ còn viết nhiều sách về Toán sơ cấp, tôi rất trân trọng các cuốn sách và các bài viết về lĩnh vực này của tác giả Phạm Quốc Phong.

Chỉ có một niềm đam mê say đắm toán sơ cấp, và coi đó là lẽ sống của mình, Phạm Quốc Phong mới có thể viết ra những bài báo và sách chuyên khảo về Toán sơ cấp có chất lượng đến như vậy.

Tôi đánh giá cao việc làm của bạn đồng nghiệp Phạm Quốc Phong và cho rằng đó là những tài liệu quý cho các thầy giáo dạy toán, cho các em học sinh có ước vọng học Toán giỏi hơn, và cho tất cả những ai yêu mến bộ môn Toán học này.

PGS.TSKH. PHAN HUY KHẢI
Viện Toán học Việt Nam

Phương pháp
GỌI SỐ HẠNG VẮNG

Bản chất khử dạng không xác định $0/0$ của bài toán tìm giới hạn là làm xuất hiện nhân tử chung để :

** Hoặc là khử nhân tử chung đưa về dạng xác định.*

** Hoặc là đưa về dạng "cơ bản", quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.*

*Trong các bài tập khó, các hạng tử cấu thành nhân tử chung thường thiếu vắng. Để giải quyết bài toán, **điểm mấu chốt** là khôi phục các hạng tử **thiếu vắng** đó.*

Việc khôi phục, gọi lại** các hạng tử đó như thế nào, bằng cách nào, sẽ được trình bày trong ba **phương pháp dưới đây

Phương pháp 1. Số hạng bất định

Thí dụ 1. *Tìm giới hạn* $A = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, với $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

Lời giải

Rõ ràng giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$, biến đổi

$$A = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}\right) \qquad (1)$$

Ta có : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = -\frac{3}{8} \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4} = \frac{1}{12} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) có : $A = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{12} = -\dfrac{11}{24}$

Lời bình 1

Trong lời giải trên ta đã thêm bớt 2 vào tử thức của $f(x)$. Ba câu hỏi đặt ra :

(1). *Tại sao phải có số 2 ?*

(2). *Tại sao lại là số 2 ?*

(3). *Tìm số 2 như thế nào ?*

Trả lời ba câu hỏi đó ta có phương pháp giải loại toán này.

* *Trả lời câu hỏi 1: Số 2 là hạng tử đã bị xoá. Muốn giải, ta phải khôi phục nó.*

* *Trả lời câu hỏi 3: Cách tìm số 2, thực hiện theo các bước sau đây :*

Bước 1: Với mọi $c \in \mathbf{R}$, luôn có :

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{5-x^3}-c}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-c}{x^2-1}\right)$$

Bước 2: Trong các số c đó, ta tìm số c sao cho x^2-1 cùng có nhân tử chung với $f_1(x) = \sqrt{5-x^3}-c$ và $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2+7}-c$.

Điều đó xẩy ra khi và chỉ khi c là nghiệm của tuyển

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(1)=0 \\ f_2(1)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(-1)=0 \\ f_2(-1)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ \begin{cases} c=\sqrt{6} \\ c=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow c=2$$

* *Đó cũng là câu trả lời tại sao lại là số 2.*

Qua thí dụ trên, chúng ta nêu lên thuật toán như sau :

- **Thuật toán 1**

Giả sử $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

Bước 1: Phân tích $f(x) = \dfrac{f_1(x)+c}{g(x)} + \dfrac{f_2(x)-c}{g(x)}$.

Bước 2 (Tìm c): Gọi α_i (i =1; 2;...) là nghiệm của $g(x) = 0$.

Khi đó c là nghiệm của hệ $\begin{cases} f_1(\alpha_i)+c=0 \\ f_2(\alpha_1)-c=0 \end{cases}$ (i = 1; 2;...)

Với c tìm được thì $\lim\limits_{x\to\alpha_i} \dfrac{f_1(x)-c}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x\to\alpha_i} \dfrac{f_2(x)-c}{g(x)}$ sẽ hoặc là dạng xác định, hoặc là dạng quen thuộc.

Sau khi tìm được c, việc trình bày lời giải như đã làm.

Cơ sở của phương pháp 1 là : Sẽ có $\lim\limits_{x\to\alpha_i} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)} = \alpha + \beta$, nếu

$\lim\limits_{x\to\alpha_i} \dfrac{f_1(x)+c}{g(x)} = \alpha$ và $\lim\limits_{x\to\alpha_i} \dfrac{f_1(x)+c}{g(x)} = \beta$

Thí dụ 2. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, với $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

Lời giải

Bước 1 (*Phân tích*): $\forall c \in \mathbf{R}$, luôn có : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}-c}{x} - \dfrac{2\sqrt[3]{1-\dfrac{x}{8}}-c}{x}$

Bước 2 (*Tìm c*): Nghiệm của mẫu thức là $x = 0$. Suy ra c là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sqrt{0+1}-c=0 \\ \sqrt{1-\dfrac{0}{8}}-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Vậy } A = 2\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\dfrac{x}{8}}-1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right) = \frac{13}{12}$$

Lời bình 2*. Ở phương pháp 1, nhân tử chung được khử để đưa giới hạn về dạng xác định, hoặc dạng quen thuộc, hoặc dạng "cơ bản".*

Thí dụ 3. Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

Lời giải

Ta có

$$K = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} - \frac{3}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{2(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)-3(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sqrt[3]{(1+3x)^2}-1}{x}+2\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}-3\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}{(\sqrt{1+2x}+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt[3]{1+3x}+1)\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}+2\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}-3\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}{(\sqrt{1+2x}+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}$$

$$= \frac{2(1+1).1+2.1-3.1}{(1+1)(1+1+1)} = \frac{1}{2}. \text{ **Đáp số** } K = \frac{1}{2}$$

(Chúng ta trở lại bài này trong phương pháp hai bằng thí dụ 7).